

[문제 2] 파동 시뮬레이션

2차원 파동 방정식(wave equation)을 직교좌표계에서 기술하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2(x, y) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right].$$

c 는 파동의 속도와 관련된 매개변수이다. 수치해를 구하기 위해 중심유한차분법(Central Finite-Difference Method)을 적용하면, 다음과 같은 이산화된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\psi|_{i,j}^{n+1} - 2\psi|_{i,j}^n + \psi|_{i,j}^{n-1}}{\Delta_t^2} = c^2|_{i,j} \left(\frac{\psi|_{i+1,j}^n - 2\psi|_{i,j}^n + \psi|_{i-1,j}^n}{\Delta^2} + \frac{\psi|_{i,j+1}^n - 2\psi|_{i,j}^n + \psi|_{i,j-1}^n}{\Delta^2} \right).$$

위첨자 n 은 time step, 아래첨자 i, j 는 spatial index, Δ_t 는 시간간격 Δ 는 공간간격을 의미한다. 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\psi|_{i,j}^{n+1} = \tilde{c}^2|_{i,j} \left(\psi|_{i+1,j}^n + \psi|_{i-1,j}^n + \psi|_{i,j+1}^n + \psi|_{i,j-1}^n - 4\psi|_{i,j}^n \right) - 2\psi|_{i,j}^n + \psi|_{i,j}^{n-1},$$
$$\tilde{c}^2|_{i,j} = \frac{\Delta_t^2}{\Delta^2} c^2|_{i,j}.$$

이 식을 통해 $n, n-1$ time step에서의 파동으로부터 $n+1$ time step의 파동을 계산할 수 있다. 계수 \tilde{c}^2 는 편의상 0.5를 기본값으로 사용한다.

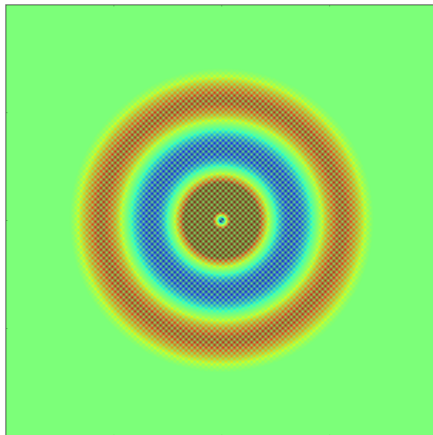
[학부팀/대학원팀 공통 문제]

바람이 없는 화창한 날, 잔잔한 연못을 생각해보자. 이 연못에 돌을 하나 던지면 수면파가 원형으로 퍼져나가는 것을 볼 수 있을 것이다. 그러나 이 수면파는 얼마 동안 출렁이며 퍼지다가 곧 잔잔한 연못으로 다시 돌아올 것이다. 이 수면파가 사라지지 않고 지속적으로 퍼져나가게 하려면 어떻게 할까? 간단한 방법은 연못 표면의 한 지점에 주기적인 진동을 주는 것이다. 진동이 잘 주어졌다면 원형파가 끊임없이 점점 퍼져나가는 것을 볼 수 있을 것이다. 주어진 예제 코드('wave_circular.c' 또는 'wave_circular.f90')는 파동방정식의 수치해를 이용해서 그림 1과 같이 원형파가 발생하도록 되어있다. 계산영역을 (8000,8000)으로 확장하고, **max time step(tmax)**을 1000으로 증가한 후, **OpenMP** 기법 또는 **MPI** 병렬 루틴들을 활용하여 최대의 계산성능을 구하라.

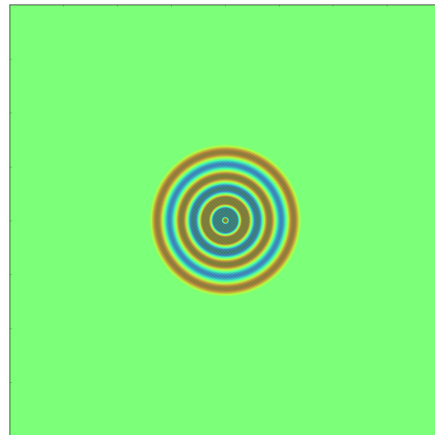
참고1) 이 문제에서 한 가지 가정하고 있는 것은 파동이 진행하는 매질(파동을 전파하는 물질)이 모든 공간에서 균일하다는 것이다. 만약 매질이 균일하지 않다면 수면파가 찌그러진 모양으로 퍼질 것이다. 예제 코드에서는 파동방정식의 계수 c^2 이 상수값 0.5로 주어져 있다.

참고2) 예제 코드에서 계산된 결과는 'field.bin'이라는 binary 파일로 저장되는데, 예제 코드와 함께 주어진 Python 가시화 프로그램으로 결과를 확인할 수 있다.

```
$ python plot_wave2d.py field.bin
```



(a) (nx,ny)=(2000,2000), tmax=500



(b) (nx,ny)=(8000,8000), tmax=1000

Figure 1: Circular waves

[대학원팀 추가 문제]

1800년 초, 영국의 Thomas Young은 이중 슬릿 실험(double slit experiment)을 통해 그 당시 받아들여졌던 빛의 입자설을 뒤엎고 빛이 파동임을 증명했다. 파동의 특징은 회절과 간섭 현상이 일어난다는 것이다. 파동이 단일 슬릿을 통과할 때 그림 2(a)와 같이 회절하게 된다. 파동이 이중 슬릿을 통과할 때는 회절과 더불어 간섭이 발생해서 그림 2(b)과 같이 간섭무늬가 나타나게 된다. Young은 이중 슬릿을 통과한 빛의 간섭무늬를 보임으로써 빛의 파동성을 증명하였다.

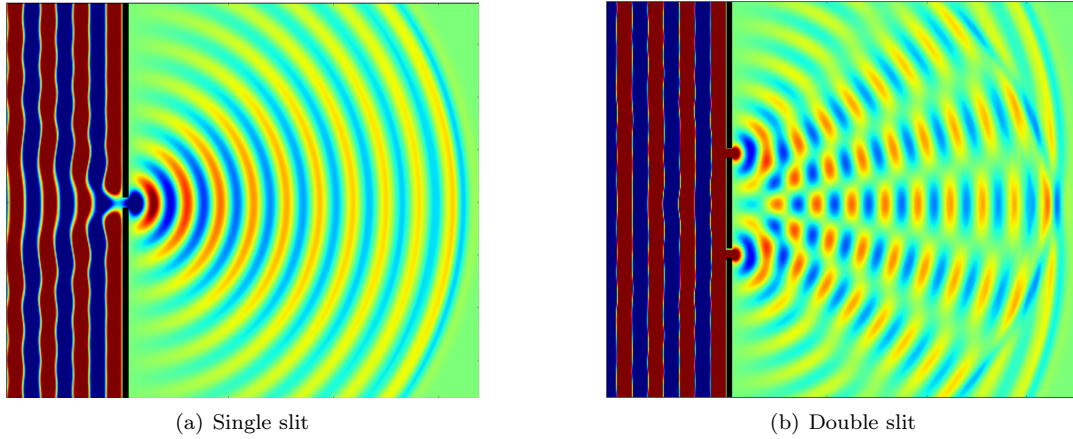


Figure 2: Diffraction and Interference

파동방정식의 수치해를 이용해서 파동이 이중 슬릿을 통과할 때의 간섭 무늬를 관찰해 보자. 이중 슬릿 실험을 위해서는 다음 두 가지가 필요하다.

- 1) 소스로 주어지는 파동의 모양이 그림 1과 같은 원형파가 아닌 그림 3과 같은 평면파가 되어야 한다. 주어진 예제 코드 'wave_slit.c'에서는 그림 3(a)와 같은 x방향 평면파를, 'wave_slit.f90'에서는 그림 3(b)와 같은 y방향 평면파를 기본적으로 생성해내도록 하였다. 그러나 평면파의 방향은 메모리 접근 효율 및 병렬 편의성을 고려하여 자유롭게 변경 가능하다.

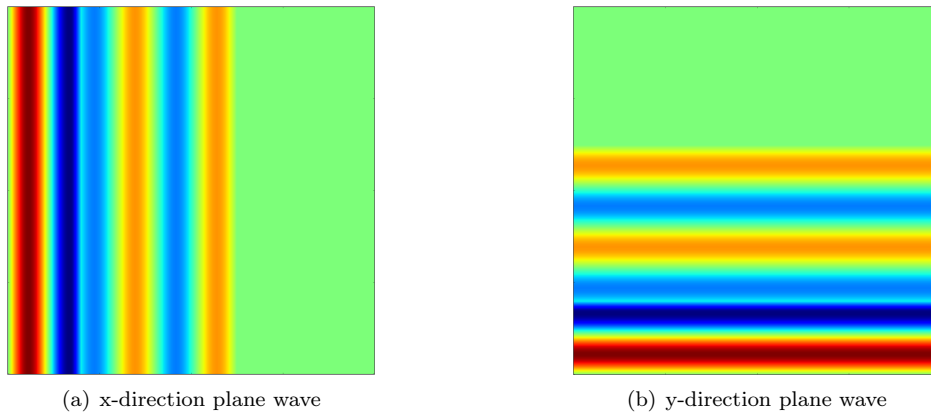


Figure 3: Plane wave sources

- 2) 슬릿 구조가 필요하다. 슬릿 구조는 계수 \tilde{c}^2 의 값을 조절해서 만들 수 있다. 계수 \tilde{c}^2 의 값이 0.0인 영역은 파동이 진행하지 못하게 되므로, 그림 4에서 슬릿을 이루는 검은색 영역에 해당하는 계수 \tilde{c}^2 의 값을 0.0으로 설정하면 된다. 나머지 영역의 계수값은 앞에서와 동일하게 0.5로 준다. 주어진 예제 코드 ('wave_slit.c' 또는 'wave_slit.f90')에는 각각의 평면파 방향에 맞는 슬릿 구조를 주는 코드가 포함되어 있다.

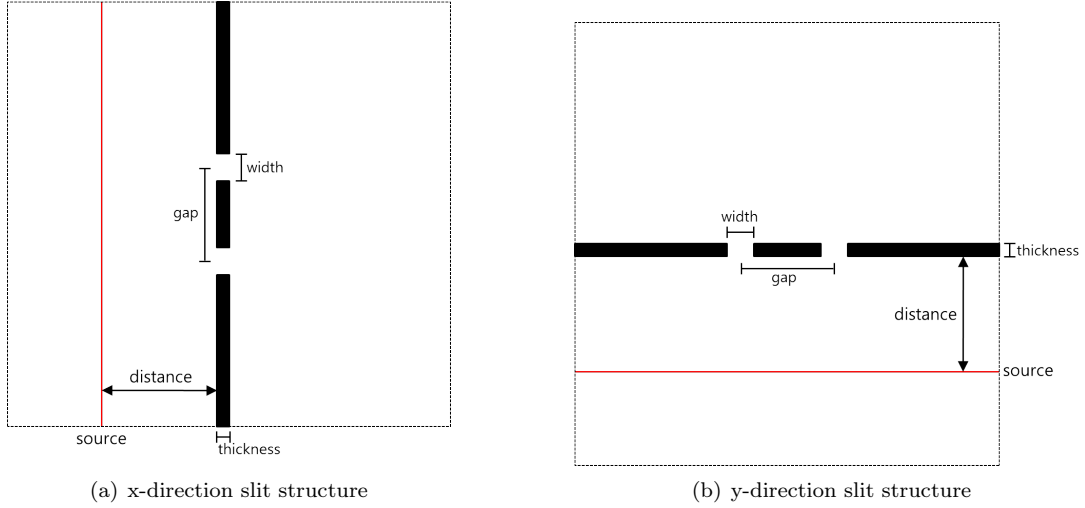


Figure 4: Slit structures

주어진 예제 코드 ('wave_slit.c' 또는 'wave_slit.f90')를 다음 조건에 맞게 수정하고, OpenMP 기법 또는 MPI 병렬 루틴들을 활용하여 최대의 계산성능을 구하라.

조건) 계산영역은 (8000,8000), max time step(t_{max})은 3000, 슬릿과 소스위치와의 간격(distance)은 1500, 슬릿의 폭(width)은 120, 슬릿의 두께(thickness)는 60, 두 슬릿간의 간격(gap)은 1200으로 설정한다. 이 조건으로 얻어지는 간섭무늬는 그림 5(a) 또는 그림 5(b)와 같다.

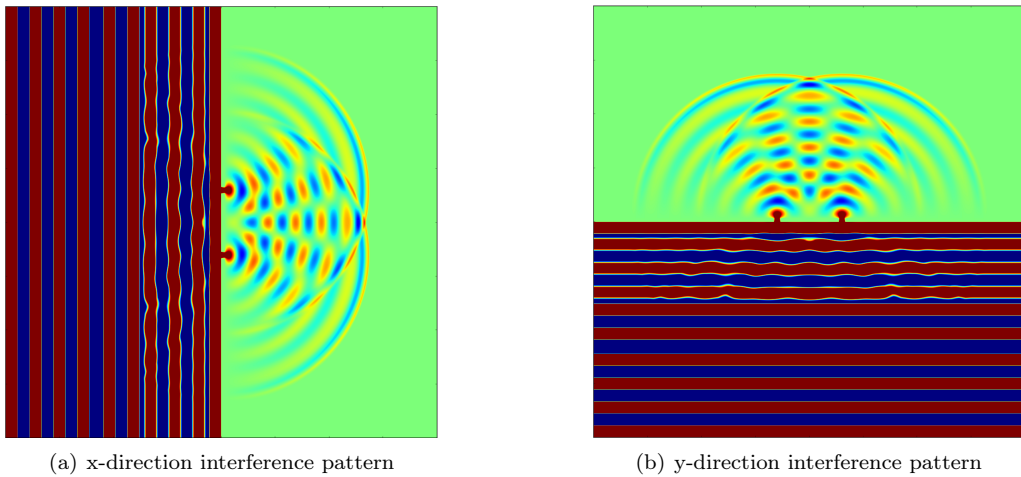


Figure 5: Interference patterns